超弦理論がつなぐブラックホールと流体力学

中村, 真; 夏梅, 誠

物性研究　94－3（2010－6）

超弦理論がつなぐブラックホールと流体力学[1]

京都大学大学院理学研究科　中村　真
E-mail: nakamura@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

高エネルギー加速器研究機構　夏梅　誠
E-mail: makoto.natsuume@kek.jp

（2010年3月8日受理）

概要

近年、ゲージ・重力対応（AdS/CFT 対応、またはホログラフィックゲージ理論）と呼ばれる対応関係が超弦理論の枠組みより提唱され、注目をあびています。この対応関係は、強く相互作用するゲージ理論の解析が古典重力理論（一般相対性理論）を用いて遂行可能であるとする対応関係です。特に、ゲージ粒子の多体系からなる流体の振る舞いは、重力理論におけるブラックホールの振る舞いをアインシュタイン方程式や時空の正則性などを通じて調べることで解析が可能となり、従来とは全く異なる方向から流体力学の考察を行うことができる可能性を秘めています。ここでは超弦理論の非専門家向けにゲージ・重力対応の基本的主張を説明し、今後の異分野交流の促進に役立てたいと思います。[2]

1　超弦理論とは

1.1　統一理論としての超弦理論

まず、ゲージ・重力対応が提唱される上で非常に重要な寄与をした超弦理論について、おさらいをしたいと思います。現在のところ、この宇宙を形作っている相互作用には4種類あると考えられています。それらは (1) 電磁相互作用、(2) 弱い相互作用、(3) 強い相互作用、そして (4) 重力相互作用です。(1)、(4) は私たちの日常生活でもおなじみの相互作用ですが、(2)、(3) については、素粒子の反応において顕著になります。(2) は核子のベータ崩壊などの際に重要な役割を果たしますし、(3) はクォークどうしを結びつける力として重要です。(1)、

[1]本稿は編集部からの依頼を受けて執筆した記事です。
[2]ここでは $\hbar = c = k_B = 1$ の単位系を用います。

(2)、(3) はいずれも「ゲージ相互作用」と呼ばれる相互作用であり[3]、素粒子の「標準模型」の中に組み込まれ、基本的性質については場の理論において量子力学的にも理解がなされています。一方で (4) の重力相互作用は恐らく人類が最も最初に体験していた相互作用であるにも関わらず、他の相互作用とは性質が異なり、その量子力学的理解にはまだ完全には到達していません。一番の問題は、場の理論で必要な「繰り込み可能性」の問題です。一般に場の量子論を用いて物理量を計算すると、非物理的な無限大が発生します。通常の場の理論では、この無限大を正しく「差し引く」ことで、正しい有限の答えを得ることができ、この操作を「繰り込み」と呼んでいます。ところが重力理論（一般相対性理論）においてはこの繰り込み操作が単純には不可能であることが知られています。

ここで登場したのが超弦理論です。そもそも、計算で発生する「無限大」は、個々の構成粒子が大きさのない「点状」の粒子から出来ているとする仮定から生じていました。そこで超弦理論では、個々の構成粒子は「点」ではなく、ある長さを持った「弦」から出来ているとします。この仮定から出発して量子論を構成すると、重力理論においても、問題となる「無限大」が生じません。

さらに、構成粒子を「弦」に持ち上げたことで、重力理論とゲージ理論の間を、より統一的に理解できるようになりました。弦理論の構成要素である弦には２種類の形態が可能です。ひとつは輪ゴムのように閉じた「閉弦」、もうひとつは端点を持つ線分のような形の「開弦」です。原理的にこの２種類が可能ですが、超弦理論を解析していくと、「ゲージ理論」の粒子は「開弦」で、重力理論は「閉弦」を用いて、記述可能なことがわかります。今まで異種の理論であったゲージ理論と重力理論が、「弦」というキーワードのもとで、より統一的に記述可能になったわけです。

1.2　重力とゲージ理論のかけはしとしての超弦理論

超弦理論のレベルで２種類の弦の形態として導入された「閉弦」と「開弦」ですが、このままでは両者は同じ「弦」として表現されるものの、依然として異なる形態であることに変わりはありません。ここで重要となるのは弦の相互作用です。弦と弦の相互作用を考えると、例えば「開弦＋開弦 → 閉弦」、「閉弦 → 開弦＋開弦」というような相互作用が可能であり、両者の形態が互いに移り合うことが可能になります。詳細は省きますが、このような弦の性質を解析していくと、同じ物理現象を「開弦のみを使って記述」することも可能であると同時に「閉弦のみを使って記述」することも可能であるような、特殊な状況が存在することがわかります。この状況では「開弦のみの理論＝ゲージ理論」を「閉弦のみの理論＝重力理論」を用いて書き換えることが可能となるのです。

[3]重力理論である一般相対性理論もゲージ理論の一種ですが、本稿で「ゲージ理論」と呼ぶ場合は重力理論は除外することにします。

2　ゲージ理論と重力理論

それではまず、詳細に入る前に、ここで重要となる二つの理論について簡単に復習したいと思います。

2.1　ゲージ理論

ゲージ理論とは、ある群で表現される内部対称性が空間の各点ごとに成立している理論で、この群によって理論が分類されます。例えば $U(1)$ 群であれば QED（量子電磁気学）、$SU(3)$ であればクォーク・グルーオンを記述する QCD になりますし、弱い相互作用を記述するゲージ理論のゲージ群は $SU(2)$ を含んでいます。また仮想的理論ではありますが、一般的なゲージ群として $SU(N_c)$（N_c は任意の正整数）を考えることも出来ます。この理論において、さらに理論の有効的相互作用の強さを保ったまま $N_c \to \infty$ の極限をとることも可能であり、そのようなゲージ理論は「large-N_c ゲージ理論」と呼ばれています。[4]

今ここでは、強く相互作用していて解析が困難な QCD を重力理論で記述することに興味があるのですが、実は QCD よりも large-N_c ゲージ理論の方が重力理論による記述が容易となります。QCD のように N_c が有限の場合は重力理論に量子補正を加える必要が生じますが、それ自体が難しい問題となってしまうのです。従って、通常、ゲージ・重力対応においては large-N_c ゲージ理論と重力理論の対応を考えることになります。large-N_c ゲージ理論では物理量は $1/N_c$ を単位として展開することができます。$N_c \to \infty$ の極限では展開の高次項が無視できるのに対し、QCD の場合では $N_c = 3$ ですので展開係数は 1/3 となります。そこで非常に大雑把には、large-N_c ゲージ理論は QCD の結果を誤差 30% くらいで再現してくれると期待できます。large-N_c ゲージ理論は現実の QCD とは異なりますが、QCD と似た性質を持っている、扱いやすい仮想的ゲージ理論ということになります。ここでは以後、「ゲージ理論」と言えば large-N_c ゲージ理論を指すことにします。

2.2　重力理論

ゲージ・重力対応に現れる重力理論は、基本的にアインシュタインの一般相対性理論です。(より正確には、一般相対性理論を拡張した超重力理論ですが、ここでは詳細はなるべく省きます。) そこでまず、一般相対性理論の概観から始めたいと思います。

[4] この $N_c \to \infty$ 極限をとる際には、$\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c$ を一定値に固定したまま極限をとります。ここで g_{YM} はもともとの $SU(N_c)$ ゲージ理論の結合定数、λ は large-N_c ゲージ理論を特徴づける有効的結合定数でありトホーフト結合 ('t Hooft coupling) と呼ばれます。

2.2.1　一般相対性理論

一般相対性理論とは、重力を幾何学的に表現する理論です。この理論では時間と空間を対等に扱い、両者をまとめて「時空」と呼びます。例えば我々の時空は空間3次元、時間1次元の3+1次元時空です（あるいは単に4次元時空と言う場合もあります)。時空を正確に定義するには二つの要素が必要で、一つは座標系、もう一つは計量です。座標系を $x^0(=t), x^1, x^2, x^3$ で張り、これらをまとめて x^μ（μ は0から3のいずれか）で表したとします。この時、計量はその時空間上の「単位長さ」を定義するために必要となります。具体的には、計量を $g_{\mu\nu}$ として $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$（ここで、同じ添え字については0から3まで和をとるものとします）で線素を定義した時に、$\int ds$ がある点からある点までの物理的距離を与えます。直観的には座標が「目盛」ならば計量が長さの「単位」であり、両者の積が物理的長さになる訳です。一般相対性理論ではこの計量が各点ごとに異なっていても良い（つまり時空座標の関数）とします。これにより、時空に曲率の概念を導入することが出来ます。

例えば我々の3+1次元時空を2次元の紙面に例えた場合、紙面の凹凸は2次元面の曲率によって数学的に定義できます。この凹凸、あるいは曲率の概念を3+1次元時空に拡張して用いるのです。詳細は教科書に譲りますが、非常に大雑把には計量を時空座標で2階微分したものが曲率に対応します。一般相対性理論では時空の曲率は「重力の強さ」と関係しており、大雑把には「重力が強い」ことは、その場所での「曲率が大きい」ことに対応すると言えるでしょう。また、電荷が電場の源泉 (source) となるように、質量を持った物体は重力の源泉となりますから、周囲の時空を曲げることとなります。物質などの重力の源泉が存在せず、あらたに質点を置いてもその質点が周囲からの重力を感じないような空間は「平坦な時空」ということになります。

我々の世界では物質同士が重力を及ぼし合っており、決して厳密には平坦な時空ではありません。しかしながら重力の相互作用はゲージ理論の相互作用に比べると非常に弱いため、ゲージ理論の物理を考える場合は事実上、時空は平坦であるとして構いません。従って、以後、ゲージ理論は常に平坦な時空上で定義されているものとします。

それでは一般相対性理論について、より具体的に理論を見てみることにします。一般相対性理論において、$d+1$ 次元の重力は以下のアインシュタイン・ヒルベルト (Einstein-Hilbert) 作用に従う力学で記述されます。

$$S = \frac{1}{16\pi G_N}\int d^{d+1}x\sqrt{-g}(R-2\Lambda). \tag{1}$$

ここで g は計量 $g_{\mu\nu}$ の行列式です。上記では「時間と空間を対等に扱う」と述べましたが、計量の意味においては時間と空間で大きな区別があります。空間方向と時間方向で、計量の符号が逆になるのです。時間方向に対して正負どちらの符号を用いるかは文献ごとに定義が異なりますが、ここでは時間方向の計量が負、空間方向の計量が正となるような、弦理論の文献で標準的な定義を採用するものとします。この符号の取り方のために、$g_{\mu\nu}$ の行列式は次元の数によらず常に負となります。(1) の中で $\sqrt{-g}$ の中にマイナスが現れているのは、行列式の負符号を打ち消すために現れています。Λ は宇宙項と呼ばれる定数であり、モデルに

応じて値が定められます。Rが時空の曲率を表します。またG_Nはニュートン定数です。一般には上記の作用に加えて物質場の作用を含めて議論することになりますが、ここでは省略することにします。

この作用を変分することによりアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R - 2\Lambda)g_{\mu\nu} = 0, \tag{2}$$

が得られます。ここで$R_{\mu\nu}$はリッチテンソル (Ricci tensor) と呼ばれ、やはり時空の曲がり具合を定義します。曲率との間には$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$の関係があります。($g^{\mu\nu}$は計量$g_{\mu\nu}$の逆行列です。) リッチテンソルも曲率も、もともと計量とその微分を用いて定義されていますので、(2) は計量についての2階の偏微分方程式です。この偏微分方程式を適切な境界条件のもとで解くことで計量が座標の関数として求まりますから、時空が決まることになります。この方程式は宇宙項Λに依存することから、Λの値によって時空の曲率Rも変化します。具体的には、空間方向の数をdとした場合$R = 2\frac{d+1}{d-1}\Lambda$の関係式が成り立ちますので、宇宙項を負の値にとると曲率負の空間が得られます。

2.2.2 ゲージ・重力対応に現れる重力理論

ゲージ・重力対応に現れる重力理論は、(広い意味での) 一般相対性理論であり、現実の宇宙の時空を記述する理論と数学的構造は同じです。しかしながら我々が宇宙を扱う場合の理論とは若干の違いがあります。項目でまとめると以下のようになります。

- 時空の次元
  我々の宇宙は3+1次元時空ですが、ゲージ・重力対応で出てくる重力理論の時空の典型的なものは4+1次元時空です。つまり余分な空間方向が一つ導入されます。[5]

- 宇宙項
  我々の宇宙はほとんど平坦ですが、厳密には若干正の曲率を持っていることが観測から知られており、その意味では宇宙項は僅かながら正であると言えます。一方、ゲージ重力対応では負の宇宙項が用いられ、結果として時空間は、負の曲率を持ちます。曲率Rが負で一定の時空の典型的なものに「Anti de Sitter」(AdS) 時空があります。(「de Sitter」時空は曲率が正で一定の時空です。) AdS/CFT対応の「AdS」はこの時空に由来しますが、実際にこの対応で用いられる時空はAdSに限らず、状況に応じて様々な時空が登場します。

- 重力以外の場
  厳密には、一般相対性理論のみでなく、重力と相互作用する様々な「場」が共存している理論を考えることになります。ここで様々な場とは、スカラー場やゲージ場などで

[5]より厳密には(超弦理論から出てきますので)9+1次元の理論なのですが、残りの5次元方向が丸まって(コンパクト化されて)おり、無限に伸びた残りの4+1次元方向のみをここでは議論しています。

すが、重力理論側に登場するゲージ場はあくまで4+1次元の曲がった空間上の場であり、QCDやlarge-N_cゲージ理論とは別のゲージ場です。これらの場についても考慮する必要はありますが、large-N_cゲージ理論側で応力・エネルギーテンソル(stress-energy tensor)のみを考慮する場合は、重力モードのみ考慮しても十分な場合があります。以下ではそのような単純な場合を考え、重力のみ考えます。

- ニュートン定数
  ここで一般相対性理論を用いる目的は、我々の宇宙を記述するためではなく、あるゲージ理論を数学的に記述するのが目的です。従って、この重力理論における「ニュートン定数」は現実のニュートン定数とは全く無関係です。実際、用いるニュートン定数は対応するゲージ理論に応じて決まりますが、ここではあとで述べる典型的なゲージ・重力対応に的を絞りますので、$G_N = \pi/(2N_c^2)$としておきます。ここでN_cは2.1章で説明されたゲージ群$SU(N_c)$のランクです。

3 ブラックホール

さて、それでは何故、一見似ても似つかない「4+1次元の重力理論」と「3+1次元のlarge-N_cゲージ理論」が対応するのでしょうか。ここではブラックホールを考えて、ヒントを探りたいと思います。特に我々はゲージ理論の多粒子系として構成される「流体」に興味がありますから、流体力学の成立に必要な「局所熱平衡」の概念が、対応する5次元重力理論にも存在するのかどうかに興味があります。

実は重力理論側にもブラックホールを用いて熱平衡の概念を導入することができます[6]。ブラックホールとはアインシュタイン方程式(2)の解の一つです。非常に大雑把には、時空の曲率が大きければ重力が強いことになると述べましたが、もし重力が非常に強く時空が「曲り過ぎる」と、光さえもそこから脱出できないような領域が現れます。それがブラックホールです。ブラックホールの外部から外向きに発せられた光は無限遠方に脱出することができますが、重力が非常に強い領域から発せられた光は脱出できずに戻ってきます。ちょうどこれらの領域の境界、光がぎりぎり脱出できないすれすれの境界面を「地平線(horizon)」と呼びます。なぜ「地平線」なのかと言うと、ブラックホールの外部の人間にとっては、地平線内からの光が届かないため地平線の内側が見えないからです。しかし見えないとは言っても時空がそこで終わっているわけではなく、時空は（曲がりながら）スムーズに地平線の内側まで続いています。ちょうど地球上で我々が目にする地平線のように、その先の世界は見えないが世界がそこで終わっている訳ではない、という状況にイメージが合致します。このように、地平線でも時空はスムーズにつながっており、特に物理的におかしな事、例えば時空

[6]平坦な時空に埋め込まれたブラックホールは一般に比熱が負となり、熱力学的に不安定です。ゲージ・重力対応で用いるブラックホールは曲率が負の時空（漸近的にAdSとなる時空）に埋め込まれたブラックホールであり、この場合比熱が正となって熱力学的に安定な系を実現します。以後、本稿で「ブラックホール」と述べる場合は漸近的にAdSとなる時空上のブラックホールを指すことにします。

の曲率が発散するなどの現象が生じているわけではありません。この点は流体の輸送係数の計算などで重要になります。

それでは、地平線からは本当に何も外部に出てこないのでしょうか？実はホーキングが、ブラックホールを量子力学的に扱うと、地平線から熱輻射（Hawking 輻射）が外部に放射されることを発見しました。そしてその熱輻射に対応する温度（Hawking 温度）を実際に計算することができたのです。実のところ、ホーキング輻射の発見以前から、ブラックホール時空には熱力学と似た性質があることが知られていたのですが、ホーキング輻射の発見によりブラックホールの物理学と熱力学の対応がより鮮明になってきました。ここで言う「熱力学の法則」とは以下のようにまとめられます。（ここで M はブラックホールの質量を表します。）この表からおわかりのように、表面重力 κ（地平線上での重力加速度）が温度 T に、地

	熱力学	ブラックホール
第 0 法則	熱平衡では温度 T が一定	定常解では表面重力 κ が一定
第 1 法則	$dE = TdS$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi G_N} dA$
第 2 法則	エントロピー S は減少しない	地平線の面積 A は減少しない
第 3 法則	物理過程で温度をゼロにできない	物理過程で表面重力をゼロにできない

平線の面積 A がエントロピー S に対応しています。より正確には、$T = \frac{\kappa}{2\pi}$、$S = \frac{A}{4G_N}$ です。このように、ブラックホールには温度の概念、つまり熱平衡の概念が自然に持ち込まれています。

4　ゲージ・重力対応 (AdS/CFT 対応)

それでは前章までで説明した基本事項を用いて、ゲージ・重力対応 (AdS/CFT 対応) の主張する内容の一部を説明したいと思います。ここでは、「なぜそのような対応の成立が予想できるのか」という原理的な部分よりも、「結論」つまりゲージ・重力対応の主張を説明することに主眼をおきます。

ゲージ・重力対応の大まかな主張

「強く相互作用する、ある種の 3+1 次元量子ゲージ理論」は「負の宇宙項を持つアインシュタイン方程式の解である 4+1 次元時空上の古典的重力理論」と等価である。

この主張の詳細を以下で説明します。

- 「等価である」とは?

  量子ゲージ理論の物理量を古典重力理論側で計算でき、その結果が正しい答えを与え

る、という意味です。ここで物理量とは、物理演算子の期待値や、演算子どうしの相関関数を意味します。例えば、ゲージ理論の応力・エネルギーテンソルの量子論的期待値や、応力・エネルギーテンソルの2点相関関数が重力理論の計算で与えられることを意味します。

- 「強く相互作用する、ある種の3+1次元量子ゲージ理論」とは?
  これ以外のゲージ理論についてもゲージ・重力対応を論じることが出来るのですが、ここでは最も代表的な例として、「3+1次元、$\mathcal{N}=4$ $SU(N_c)$ large-N_c 超対称ゲージ理論で、トホーフト結合が無限大の極限をとった理論」を扱うことにします。この特殊なゲージ理論について順番を追って説明します。まず「 $SU(N_c)$ large-N_c」の意味は2.1章で説明した通りであり、ある種の理想化をしたゲージ理論です。「3+1次元」とは、ゲージ理論の住む空間が、空間3次元、時間1次元のいわゆる我々の世界と同じ次元を持つ世界であることを意味します。さらに、(より一般的な場合も考察できますが) ここでは、ゲージ理論の住む時空は平坦であるとしておきます。「超対称性」とはフェルミオンとボゾンの入れ替えに対する対称性のことで、$\mathcal{N}=4$とは、この「入れ替えの方法」として4種類の方法が存在する理論のことを指します。これも一種の理論の理想化と考えて良いでしょう。「トホーフト結合」とは相互作用の大きさのことで、定義は2.1章の脚注で説明されています。また、ゲージ理論は量子化されたものを考えます。以上を大雑把にまとめますと、我々の世界で強く相互作用するゲージ理論を考えるのですが、重力理論との対応を良くするために、ゲージ理論としては現実世界に存在する理論ではなく「理想化された」理論を考えます。

- 「負の宇宙項を持つアインシュタイン方程式の解である4+1次元時空上の古典的重力理論」とは?
  負の宇宙項$\Lambda<0$を持つアインシュタイン方程式(2)の解は、漸近的にAdS空間になります。ここで「漸近的にAdS」とは、時空の中心から十分離れた「境界」近傍ではAdS空間となっていることを意味します。逆に時空の中心付近では必ずしも厳密にAdS空間である必要はありませんが、いずれにしても時空は負の曲率を持ちます。例えば4.1章で詳しく調べる時空はAdSブラックホールと呼ばれており、厳密なAdS時空ではありませんが負の曲率を持ちます。「4+1次元」(単に5次元と呼ぶ場合もあります)とは、我々の住む時空間に比べて、さらに余分な空間方向が1つ存在することを意味します。

以上を用いて結論できる一つの主張は、

ゲージ・重力対応の主張の一例

「上記で述べたゲージ理論の応力・エネルギーテンソルの期待値は、1次元高い曲率負の曲がった時空上の重力理論を用いて計算できる」

ということになります。

ここまで来ると、重力理論と流体力学の接点が見えてきます。流体力学とは局所熱平衡が存在する状況において保存量を考え、その保存量の巨視的な振る舞いを記述する有効理論です。ここで「保存量」とは例えば応力・エネルギーテンソルを意味します。応力・エネルギーテンソルについては上記の主張により重力理論側で記述することができます。従って、あとは重力理論側に「局所熱平衡」の概念を導入し、応力・エネルギーテンソルの巨視的な振る舞いを抽出すれば、重力を用いた流体力学の記述が出来上がることになります。この時に活躍するのが3章で説明したブラックホールです。なぜならばブラックホールには熱平衡の概念が存在するからです。そこで次章ではブラックホール時空から具体的にどのようにゲージ理論の応力・エネルギーテンソルを読み取るのかについて説明します。

4.1　重力側からの応力・エネルギーテンソルと熱力学量

ここでは宇宙項が $\Lambda=-6$ となる単位系を用います。この場合の (2) の解には

$$ds^2=\frac{1}{u^2}\left[-\frac{\left(1-u^4/u_0^4\right)^2}{1+u^4/u_0^4}dt^2+\left(1+u^4/u_0^4\right)d\vec{x}^2+du^2\right] \tag{3}$$

という計量のブラックホール解があります。ここで $t,\vec{x},u$ はそれぞれ時間、空間（3方向）、「動径方向」の座標であり、これは時間1次元、空間4次元の5次元時空となっています。ここで4つの空間方向のうち、いわゆる我々の日常概念での「空間」に対応する方向は $\vec{x}$ で表現される3方向であり、残りの「動径方向 u」はゲージ理論あるいは流体力学側では存在しない仮想的方向と考えて差し支えありません。[7]

(3) において、地平線は $u=u_0$ の位置にあります。u の値が大きくなる方向はブラックホールに近づく方向に相当し、この座標の取り方では u 方向の領域は $0\leq u\leq u_0$ で定義されています。この領域はブラックホールの外側の領域、つまり光などの形態で外部に情報を引き出すことが可能な領域です。地平線から最も遠い $u=0$ の場所は「境界」と呼ばれる場所で、ゲージ理論あるいは流体力学との関連付けに重要な役割を果たす場所です。

ゲージ・重力対応で二つの理論を結びつけるには、「境界」が重要な役割を果たします。そこで (3) の計量を境界 $u=0$ 付近で展開して、その振る舞いを見てみたいと思います。まず最初に、(3) の計量がより一般的には

$$ds^2=\frac{1}{u^2}\left[\tilde{g}_{ij}(x,u)dx^idx^j+du^2\right] \tag{4}$$

と書けることに注意したいと思います。ここで i,j の足は0から3までを走るものとします。これは Fefferman-Graham 座標と呼ばれ、$\Lambda<0$ の (2) の解は必ずこの形で書けることが知られています。例えば $\tilde{g}_{ij}$ を対角的にとり $-\tilde{g}_{00}=\tilde{g}_{11}=\tilde{g}_{22}=\tilde{g}_{33}=1$ としたものは通常の AdS 空間になりますし、$\tilde{g}_{00}=-\left(1-u^4/u_0^4\right)^2/\left(1+u^4/u_0^4\right)$、$\tilde{g}_{11}=\tilde{g}_{22}=\tilde{g}_{33}=\left(1+u^4/u_0^4\right)$ としたものが (3) の計量です。

[7]この動径方向の物理的意味は6章でコメントします。

それでは、(4) の計量を境界 $u=0$ 付近で展開することを考えますが、その展開は $g_{ij}(x,u)$ を $u=0$ 付近で展開することでわかります。この展開は以下の形になることが知られています。

$$\tilde{g}_{ij}(x,u)=\tilde{g}^{(0)}_{ij}(x)+u^4(4\pi G_N)T_{ij}(x)+O(u^6). \tag{5}$$

この時、ゲージ・重力対応は以下の主張をします。[8]

ゲージ・重力対応の「辞書」

- ゲージ理論が定義されている 3+1 次元時空の計量は $\tilde{g}^{(0)}_{ij}(x)$ で与えられる。
- ゲージ理論の 3+1 次元 応力・エネルギーテンソルは $T_{ij}(x)$ で与えられる。

この規則を具体的に (3) に当てはめてみましょう。計量が

$$ds^2=u^{-2}\left[\underbrace{\left(-dt^2+d\vec{x}^2\right)}_{\text{3+1d metric}}+u^4\underbrace{\left(\frac{3}{u_0^4}dt^2+\frac{1}{u_0^4}d\vec{x}^2\right)}_{\text{stress tensor}\times(4\pi G_N)}+\cdots+du^2\right] \tag{6}$$

と展開されることから、(3+1) 次元計量は $ds^2_{(4d)}=-dt^2+d\vec{x}^2$ で与えられることがわかり、応力・エネルギーテンソルは

$$T_{ij}=\frac{1}{4\pi G_N}\frac{1}{u_0^4}\mathrm{diag}(3,1,1,1) \tag{7}$$

となることが読み取れます。ここで diag は対角成分を意味します。今、$G_N=\pi/(2N_c^2)$ でしたので $(4\pi G_N)^{-1}=N_c^2/(2\pi^2)$ です。u_0^4 は何を意味するのでしょうか？それにはブラックホール時空 (3) の以下の物理量に注目すると物理的意味が明確になります。

- 温度
  (3) の時空のホーキング温度は $T=\sqrt{2}(\pi u_0)^{-1}$ で与えられることが知られています。これがゲージ理論側の温度に対応します。
- エントロピー密度
  ゲージ理論側のエントロピー密度 s はブラックホールのエントロピー密度で与えられます。これは地平線の単位面積を a として $a/(4G_N)$ で与えられます。今の場合、$a=\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}=(\sqrt{2}/u_0)^3$ で与えられます。$G_N=\pi/(2N_c^2)$ および上記のホーキング温度を用いると

$$s=\frac{1}{2}N_c^2\pi^2T^3 \tag{8}$$

  が得られます。

[8] ここで紹介する「辞書」は GKP-Witten 処方 [2] と呼ばれる一般的関係の特別な場合です。$\tilde{g}^{(0)}_{ij}(x)$ で与えられる 3+1 次元時空が平坦でない場合は、ここで与える $T_{ij}(x)$ に対して補正が付きます。

従って、$u_0^{-4}=\pi^4T^4/4$と同定できます。以上により応力・エネルギーテンソルを完全にゲージ理論の言葉で書くことが出来て

$$T_{ij}=\frac{1}{8}N_c^2\pi^2T^4\mathrm{diag}(3,1,1,1) \tag{9}$$

となります。物理的には、静的な流体のT_{00}はエネルギー密度ρ、T_{ii} $(i=1,2,3)$は圧力Pですので、温度を用いてこれらを表すと、ブラックホール時空から

$$\rho=\frac{3}{8}\pi^2N_c^2T^4,\ P=\rho/3, \tag{10}$$

の関係を読み取ることができたことになります。

今の場合、応力・エネルギーテンソルやエントロピー密度について次の事実が確認できます。

1. <u>スケール不変性と状態方程式</u>
   応力・エネルギーテンソルのトレースはゼロであり、$P=\rho/3$の関係が成立しています。これは次の事実と合致します。実はここで対応している$\mathcal{N}=4$超対称ゲージ理論はスケール変換で不変な理論であることが知られており、そのため応力・エネルギーテンソルのトレースはゼロとなります。また、$P=\rho/3$の関係は流体方程式を解く上で重要な「状態方程式」を与えています。

2. <u>次元解析</u>
   次元解析から、ρやPは「エネルギー～長さの逆数」の4乗の次元でなくてはなりません。ここでは唯一の物理スケールである温度Tが次元を担っており、ρとPがそれぞれT^4に比例していることが確認できます。

3. <u>自由度</u>
   エントロピー密度は次元解析から「長さの逆数」の3乗の次元であり、実際にT^3に比例しています。またlarge-N_c $SU(N_c)$ゲージ理論の自由度はN_c^2に比例しますが、エントロピー密度もN_c^2に比例していることが確認できます。

4. <u>熱力学第一法則</u>
   ここではエントロピー密度(8)を直接地平線の面積から求めましたが、この値は応力・エネルギーテンソルから読み取った(10)のρ、Pを用いると、熱力学第一法則から得られる関係式$\rho=Ts-P$を満たしていることが確認できます。

上記では、ゲージ・重力対応を用いると（上記の例では「強結合large-N_cの$\mathcal{N}=4$超対称ゲージ理論」という特殊な理論についてでしたが）、ゲージ理論側の応力・エネルギーテンソルという物理量が、アインシュタイン方程式を解くことで得られることが分かりました。しかし上記で得た結果のいくつかは、ゲージ理論側の知識で既に知られている内容でもありました。ゲージ・重力対応を用いることで新たに得られた情報とは何でしょうか。

上記のような単純な例では、例えば ρ における T^4 の比例係数 $\frac{3}{8}\pi^2 N_c^2$ が、そのような新たな情報の一例です。もちろんこの係数は理論の「自由度」に対応しますので、係数が N_c^2 に比例することは容易に推測できます。問題は数係数 $\frac{3}{8}\pi^2$ です。

$\mathcal{N}=4$ の超対称ゲージ理論にはボゾンとフェルミオンに対してそれぞれ $8N_c^2$ 個の自由度があることを考慮して、超対称ゲージ理論が質量ゼロの自由粒子系であると仮定すると、

$$\rho = \frac{1}{2}\pi^2 N_c^2 T^4 \tag{11}$$

が得られます。これはあくまで粒子間の相互作用を全く無視した場合の計算であり、強結合極限でのゲージ・重力対応からの結果 $\frac{3}{8}\pi^2 N_c^2 T^4$ は自由粒子の場合の 3/4 倍となっていることがわかります。この 3/4 倍は非常に非自明な相互作用の影響を表していると考えられ、ゲージ・重力対応で予言される一つの結果です。言い換えると、ゲージ・重力対応では重力側の古典的計算により、相互作用も含んだ分配関数の計算を自動的に行っていることになります。

5　流体力学と時空の力学

前章では、系が静的な場合のゲージ理論プラズマの応力・エネルギーテンソルを重力側から読み取る具体例を見ました。この方法を系が動的な場合に応用すれば、応力・エネルギーテンソルの時間的・空間的発展の記述が得られます。実際、(5) を (4) に代入し、さらに全体の計量をアインシュタイン方程式に代入すると、境界近傍のアインシュタイン方程式から

$$\nabla_i T^{ij} = 0, \tag{12}$$

が得られます。つまりゲージ理論プラズマのエネルギー運動量の保存則は自動的にアインシュタイン方程式の一部として実現しています。

ゲージ理論プラズマを流体として扱うためには「局所熱平衡」の成立が必要ですが、今まで説明したように重力側では（漸近的に AdS となる）ブラックホール時空を考えることにより「熱平衡」の概念が導入されます。非常に大雑把には、重力側で「ブラックホールが存在していると考えて良い」場合にはゲージ理論側で「局所熱平衡」が成立していると考えても良いと思われます。局所熱平衡が存在する場合に、応力・エネルギーテンソルを流速や輸送係数などの巨視的な量で定義したのが流体の構成方程式であり、その構成方程式にエネルギー運動量保存則を課したのが流体方程式です。従って、アインシュタイン方程式に従って時間・空間的に発展するブラックホールは、流体方程式に従って時間・空間的に発展する流体に読み替えることができるでしょう。つまり、時間・空間的に発展するブラックホール時空から読み取られるゲージ理論の応力・エネルギーテンソルの振る舞いは、流体力学の結果を実現していることが予想されます。まとめると

<u>ゲージ・重力対応と流体力学</u>

ブラックホールの力学 $\Longleftrightarrow$ 流体力学

という対応関係がゲージ・重力対応を通して見えてきます。

もっとも、時間・空間変化するブラックホールについては、その定義や熱力学的性質なども含め、それ自身がまだ完全には理解されておらず、一般相対性理論における一つの研究テーマとなっています。しかしながら、静的あるいは定常なブラックホール時空から僅かにずれた動的なブラックホールを扱う研究は、近年ゲージ・重力対応の文脈でも研究されており（これは、系が緩やかに変化する状況に対応しますので、流体近似が妥当な範囲での解析と考えることができます）、輸送係数などの計算が重力時空を用いて行われています。

5.1　輸送係数の計算

重力時空の時間発展から流体の時間発展が得られるならば、それは流体の輸送係数が得られることを意味します。なぜならば流体の時間発展は一般に輸送係数に依存するからです。実際、重力理論を用いて、対応するゲージ理論流体の輸送係数を計算することができます。ここでは、ずり粘性率 η の計算を例にとって説明したいと思います。

ずり粘性率 η は次の構成方程式により現象論的に定義されます：

$$\begin{aligned} T^{ij} &= (\rho+P)u^i u^j + P\widetilde{g}^{(0)ij} \\ &\quad - \triangle^{ik}\triangle^{jl}\left\{\eta\left(\nabla_k u_l + \nabla_l u_k - \frac{2}{3}\widetilde{g}^{(0)}_{kl}\nabla\cdot u\right) + \zeta\widetilde{g}^{(0)}_{kl}\nabla\cdot u\right\} + \cdots, \end{aligned} \tag{13}$$

ここで u^i は流体の 4 元速度 [9]、$\triangle^{ij} \equiv \widetilde{g}^{(0)ij} + u^i u^j$ は空間方向への射影テンソル、ζ は体積粘性率です。また ∇_i は流体が定義されている 3+1 次元時空の座標系の計量 $\widetilde{g}^{(0)}_{ij}$ についての共変微分です。ここで流体は Minkowski 時空上に静止しており 4 元流速は $u^i = (1,0,0,0)$ で与えられるものとします。この場合は $\widetilde{g}^{(0)}_{ij} = \eta_{ij} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ となり、共変微分は通常の微分となりますが、以下では計量を少し変化させることを考えますので、一般的に共変微分を用いて書いておきます。最後の $\cdots$ は流速の高階微分項であり、ここでは流速の 2 階微分以降の項は無視することにします。輸送係数は、系に対してある変位（あるいは外力）を与えた際の応答として読み取ることができます。ここではそのような変位として計量の微小変位 $\widetilde{h}^{(0)}_{ij}$ を

$$\widetilde{g}^{(0)}_{ij} = \eta_{ij} + \widetilde{h}^{(0)}_{ij} \tag{14}$$

のように導入し、この $\widetilde{h}^{(0)}_{ij}$ に対する流体の応答を調べることにします。ただし変位 $\widetilde{h}^{(0)}_{ij}$ は時間的に変化するものとし、$\widetilde{h}^{(0)}_{ij} \propto e^{-i\omega t}$ であるとします。変位に時間変化を加える理由は次の通りです。ここではずり粘性率の大きさ、つまり散逸の大きさを測りたいのですが、散逸は流体が時間的あるいは空間的に変動していなくては計測できません。そこでここでは微小な時間変動を加えるわけです。また、ずり粘性率を測定するのに便利な変位として特に空間方向の非対角成分の計量の変位 $\widetilde{h}^{(0)}_{12}$ を考えることにします。このような変位に対する応力・エ

[9] 5 次元時空の 5 番目の座標 u とは区別して下さい。

ネルギーテンソルの応答は、(13) より以下のようになります。

$$\delta\langle T_{12}\rangle = -Ph_{12}^{(0)} - 2\eta(\delta\Gamma_{12}^{0}) + \cdots = -P\tilde{h}_{12}^{(0)} + i\omega\eta\tilde{h}_{12}^{(0)} + \cdots. \tag{15}$$

ここで Γ_{12}^{0} はクリストッフェル (Christoffel) 記号であり、今の場合 $\delta\Gamma_{12}^{0} = \frac{1}{2}\partial_t\tilde{h}_{12}^{(0)} = \frac{1}{2}(-i\omega)\tilde{h}_{12}^{(0)}$ で与えられることを用いました。従って、η を読み取るには $\delta\langle T_{12}\rangle$ の虚部の ω の一次の係数を読めば良いことがわかります。

それでは (15) の左辺を重力理論を用いて計算してみましょう。まず、(4) および (5) から、(14) で与えられる計量は 5 次元時空の「境界 ($u=0$) での」計量に u^2 をかけたものに対応していたことを思い出しましょう。境界での計量が (14) の摂動を受けますので、その境界条件に従う 5 次元計量も次のような摂動を受けます：

$$g_{ij}(u) = \bar{g}_{ij}(u) + h_{ij}(u), \tag{16}$$

ただし、$\bar{g}_{ij}(u)$ は変位を加える前の 5 次元計量 (3) の空間成分です。つまりここでやるべきことは以下のようになります。

1. (3) の計量の周りでのアインシュタイン方程式により、揺らぎ $h_{12}(u)$ の振る舞いを調べる。

2. その揺らぎを u で展開し (5) の右辺第 2 項に相当する部分を読み取ることで、応力・エネルギーテンソルの応答を見る。

それでは、具体的にやってみましょう。$h_{12}(u)$ は時空 (3) まわりでのアインシュタイン方程式に従いますが、境界 ($u=0$) 近傍での解は

$$h_{12}(u) \sim C_1 u^{-2} + C_2 u^2 + \cdots \tag{17}$$

のように振る舞うことがわかります。アインシュタイン方程式は 2 階の微分方程式ですので $h_{12}(u)$ を決めるために適切な境界条件を課す必要があり、それらの境界条件により 2 つの定数 C_1、C_2 が決まります。第 1 の境界条件は、時空の境界 $u=0$ 近傍において 5 次元計量のゆらぎが流体側の計量の摂動に一致するための条件であり

$$h_{12}(u)|_{u\to 0} = \frac{1}{u^2}\tilde{h}_{12}^{(0)} \tag{18}$$

で与えられます。これにより $C_1 = \tilde{h}_{12}^{(0)}$ が決まります。第 2 の条件は「重力波」である h_{12} がブラックホールの地平線では「吸い込まれる一方」であり、決して放出されない (in-going wave boundary condition) という条件を課すことになります。この時点で「ブラックホールの存在」を要請したことに注意してください。すると解である h_{12} が一意に決まり、C_2 が決定されることになります。

ブラックホールとしては、場が吸い込まれる一方というこの境界条件は自然です。輸送係数を計算する際、この境界条件が「散逸の起源」に本質的な役割を果たします。そもそも、

一般相対性理論は時間反転対称な理論形式です。その一般相対性理論から散逸のような非可逆性が生まれる理由は、ブラックホールの存在であり、今の摂動問題ではこの境界条件が理由です。事実、非可逆性の現れである第二法則がブラックホールに対して成立することは、熱力学との表面的な対応ですでにみた通りです。ここでの計算は、ブラックホールによる散逸、およびそれに伴うエントロピー生成をより精細に調べ、実際にゲージ理論での散逸と対応づけているとみなすことができます。

さて、実際にアインシュタイン方程式を解いてこれらの境界条件を課すと

$$C_2 = \frac{i\omega}{4} a\, \tilde{h}_{12}^{(0)} \tag{19}$$

が得られます。ここで a は地平線の単位面積です。これを用いて、(17) の右辺第 2 項と (5) を照らし合わせて応力・エネルギーテンソルの反応を読み取れば良いことになります。

以上を念頭におきながら計算を行うと、重力理論側からは

$$\begin{aligned} \langle \delta T_{12} \rangle &= (i\omega)\frac{1}{4\pi G_N}\frac{a}{4}\tilde{h}_{12}^{(0)} + \text{terms not linear in } (i\omega) \\ &= (i\omega)\frac{s}{4\pi}\tilde{h}_{12}^{(0)} + \text{terms not linear in } (i\omega) \end{aligned} \tag{20}$$

が結論されます。ここで、$a/(4G_N)$ をエントロピー密度 s で置き換えました。(15) と比較することにより

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} = \frac{\hbar}{4\pi k_B} \tag{21}$$

が得られます。ここで最後の式では 1 としていた基本定数を顕わに表示しました。これは知られている流体の中で最も低い値です。[10] 一般に、粘性は粒子間の相互作用が大きければ大きいほど小さくなりますが、ここで考えているゲージ理論では強結合極限をとっていますので、小さいずり粘性の値が得られることは整合性がとれています。

5.2　普遍性

ここまでで、ゲージ理論流体の流体力学を重力理論で記述するにあたって、ブラックホール、特にその地平線が重要な役割をしていることを見ました。ここではさらに次のような普遍性の議論を紹介したいと思います。(21) で得られた $\eta/s = 1/(4\pi)$ は、広い範囲の流体について成立するのではないかという議論があります。これは以下のような理由によります。

前節で $\eta/s = 1/(4\pi)$ が得られた原因は、C_2 が地平線の面積要素を用いて (19) のように与えられたのが理由でした。ここでの計算は、ゲージ・重力対応のうち最も簡単なモデルにおける計算でしたが、より一般的な場合において、既知の例 [11]では常に (19) の構造が存在することが確認されています。[6]

[10]純粋な超流動体では η、s ともにゼロになりますが、現実の超流動体では超流動成分と常流動成分の混合であり、そのような流体の η/s はこの値より大きいことが知られています。

[11]ここでは、対応するゲージ理論側を非閉じ込め相にとり、さらに $N_c \to \infty$、$\lambda \gg 1$ の極限をとる場合に議論を限ります。

従って、興味深いことに、ゲージ・重力対応におけるこれらの例では、η と s がともに地平線の単位面積 a という共通の物理量を用いて表わされ、結果として両者の比が $1/(4\pi)$ という単純な結果に帰着します。(a の具体的な値そのものはモデルに依存します。) これらの状況証拠から、$\eta/s = 1/(4\pi)$ はゲージ・重力対応が適用できるゲージ理論プラズマに普遍的に成り立つ性質ではないかと推測することができます。[7]

<u>η/s の普遍性</u>

> その重力双対がブラックホールで表わされるようなゲージ理論流体については、個々の流体の詳細によらず $\eta/s = 1/(4\pi)$ が広く成立するのではないか。

もちろん、重力側がアインシュタイン重力となるためにはゲージ理論側のトホーフト結合を無限大にとる、N_c が無限大の極限を考える、などの制限があり、実際のゲージ理論流体ではこれらの条件は満たされていませんので η/s の値は $1/(4\pi)$ からずれてきてもおかしくありません。しかしながら、このような理論の詳細によらない普遍的性質は、超対称性の存在するゲージ理論流体を超えて現実の QCD におけるプラズマにも外挿できる可能性があり、注目すべき性質です。[12] [13]

6 余分な次元と粗視化

通常、多粒子系の微視的記述から流体力学的記述を得るためには、連続極限をとり長時間・長距離モードのみを抽出する手続き、つまり「粗視化」の手続きが必要です。重力理論側では、この「粗視化」の手続きがいったいどのように行われているのでしょうか。ポイントは重力理論側の余分な次元にあると考えられます。

3+1 次元のゲージ理論を記述するためには 4+1 次元の重力理論が必要となり、重力理論側では余分な方向、動径方向 (4.1 章の u) が現れました。今までは、この余分な方向は仮想的な方向であるとして特に意味づけはしていませんでした。実は、この動径方向はゲージ理論におけるエネルギースケールに対応しています。これは以下のような考察により理解することができます。

5 次元側の時空 (4) と (5) を再度考察してみましょう。境界 $(u = 0)$ 近傍における時空は

$$ds^2 = \frac{1}{u^2}\left[\widetilde{g}^{(0)}_{ij}dx^i dx^j + d\vec{x}^2 + du^2\right] \tag{22}$$

となります。この境界近傍の時空においては、次の 2 種類の操作が等価であることがわかります。

[12] いかなる流体に対しても $\eta/s \geq 1/(4\pi)$ という限界が成立するという予想もたてられています [7]。この限界の成立については、きちんとした物性物理学からの研究が望まれます。

[13] 米国 RHIC 加速器にて生成されているクォーク・グルーオンプラズマでは $\eta/s \sim O(0.1)$ が観測されていますが [8]、これは偶然でしょうか必然でしょうか？

1. ゲージ理論側の3+1次元計量を $\tilde{g}^{(0)}_{ij} \to \tilde{g}^{(0)}_{ij} e^{-2\alpha}$ とスケール変換すること

2. 計量はそのままで、動径座標を $u \to u\, e^{\alpha}$ とスケールさせること

ここで粗視化について考えてみます。ゲージ理論側での粗視化の一つの方法は、次のようにして行うことができます。まず、微視的物理を記述する典型的長さスケールを ϵ としましょう。この時、粗視化された巨視的物理は ϵ に比べて十分長距離のスケールにおいて出現します。従って、逆に、ϵ という微視的スケールをゼロに持っていくような極限操作を行うことで巨視的物理が抽出できるとも考えられます。長さの単位は計量の平方根で決まっていますので、上記1のスケール変換で ϵ は $\epsilon \to \epsilon\, e^{-\alpha}$ と変換されます。従って正の α を用いてスケールさせることで、巨視的物理が抽出されるでしょう。

一方で、5次元重力の視点では、このスケーリングは、計量には触れずに上記2の変換を行うこととも等価です。正の α を用いたこの変換において、u の値は大きい方、つまり時空の境界 $(u = 0)$ から遠ざかる方向にずれます。言い換えると、5次元計量はそのままで動径座標 u の大きい方向に移動することは、ゲージ理論側ではより長距離スケールの物理モードを扱うことに対応していると考えられます。この考え方では、境界近傍に存在する物理的自由度は非常に高いエネルギースケール（短い長さスケール）の自由度に対応し、逆に重力時空の奥深くに存在する重力モードは、ゲージ理論における低エネルギースケール（長距離スケール）の自由度に対応することになります。

実際、これまでに見たゲージ・重力対応の解釈では、この考え方が少なくとも定性的には正しいことを示唆します。重力時空の（情報を取り出すことが可能な、ブラックホール外部領域で）最奥に位置するのが地平線ですので、最も長距離スケールの物理は地平線上での物理に対応することになります。事実、ホーキング温度やエントロピーなどの巨視的な熱力学的物理量は、地平線上で得られていました。また、巨視的な物理の特徴である散逸も、地平線での境界条件により実現していました。このように考えると、重力理論側では、境界から地平線に向けて動径座標を遡ることで自由度の粗視化が行われている、と解釈することも可能です。巨視的自由度を抽出したければ、時空の最奥部分の物理モードに注目すれば良いのです。実際、このような重力理論側の性質を利用してゲージ理論側での「繰り込み群」を理解しようとする「ホログラフィック繰り込み群」の研究もなされています。[10]

もともとゲージ・重力対応はゲージ理論の微視的記述を行う道具として研究されてきた面があります。例えばゲージ・重力対応では、ゲージ理論の構成粒子どうしの微視的反応（粒子の散乱振幅の計算など）を調べることが可能です。一方で、上で述べたように巨視的な物理を抽出する機構も備えています。巨視的物理を抽出するための粗視化がアインシュタイン方程式を解く過程で「自動的に」なされているのがゲージ・重力対応の一つの特徴であるとも言えると思います。

7 さらなる応用と発展

ここまで、ゲージ・重力対応の基本的主張と、流体力学と重力理論の対応を概観してきましたが、さらに以下で述べるような発展がなされてきました。

1. その他の輸送係数
これまで、ずり粘性率に焦点を絞りましたが、その他の輸送係数を求めることも可能です。また、応力・エネルギーテンソル以外に保存量（例えば電荷など）が存在する場合についても議論ができます。この場合、対応する重力時空は電荷を帯びたブラックホールになります。

2. 動的流体と時空の正則性
5.1 章では、静止流体に対して周波数 ω の周期的な微小摂動を加え、その摂動に対する流体の応答から η を読み取りました。その際、重力理論側では静的ブラックホールを考え、そこに微小摂動を加えて地平線で摂動が完全に吸収されるという条件を課しました。一方、はじめから動的流体をあらわに考え、対応する動的な 5 次元時空を直接求め、その応力・エネルギーテンソルの時間的・空間的発展から η を読み取ることも出来るはずです。時間依存する時空を得るためにはアインシュタイン方程式を解きますが、解の決定のためには時間依存する境界条件を正しく指定する必要があります。この場合、「地平線における摂動の完全吸収」の条件は用いることができません。なぜなら、地平線の位置、さらには地平線の有無そのものが、解を得るまで決まらないからです。境界条件の問題は次のようにして解決します。与えるべき 2 種類の境界条件は (5) の右辺第 1 項と第 2 項であり、これらを指定することで u のべきの高次の項も決まります。第 1 項は流体側の計量でしたので、問題は第 2 項の T_{ij} の与え方です。実は、T_{ij} を勝手に与えると、得られる重力解に「裸の特異点」[14]が現れ、地平線が定義できなくなることが経験的に知られています。裸の特異点が存在せず、地平線の定義が可能となるような境界条件 T_{ij} が唯一存在し、それがゲージ理論側の物理的に正しい応力・エネルギーテンソルを与えるというのが、現在理解されているゲージ・重力対応の主張です[15]。今は時間発展する解を得ようとしていますので、境界条件 T_{ij} も時間の関数です。つまり、時空の正則性（あるいは地平線の存在条件）から応力・エネルギーテンソルの時間発展が指定され、この応力・エネルギーテンソルの振る舞いから輸送係数を読み取ることが可能となります。得られる結果は 5.1 章の結果に一致することが知られています。[5, 11]

3. 流体力学に対するゲージ・重力対応の貢献
ゲージ・重力対応の研究が（相対論的）流体力学の進展に貢献した例が、筆者らの知

[14]この特異点とは重力理論における物理量（例えば曲率 tensor の 2 乗 $R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}$ など）が発散してしまう点のことであり、「裸の」とは、この特異点が地平線で囲まれておらず外部から「見える」状態となっていること、を意味します。

[15]実は 4.1 章で用いた解は、静的で裸の特異点のない解をはじめから選んでいました。

る限りで二つほどあります。一つは因果的流体力学についての貢献、もうひとつは量子異常を含む流体の流体力学に対する貢献です。

因果的流体力学

5.1 章で扱ったような流速の 1 階微分項までのみ用いる形式では、流体中の微小変動が無限の速さで伝わってしまうという因果律の破れ (acausality) の問題が存在します。これはちょうど、拡散方程式を用いると、海のある点に一滴の砂糖水を落とした瞬間、無限遠方の海水が「ほんの少し」甘くならねばならないという、情報の無限速度での伝搬に似ています。この問題は 2 階微分の項を取り入れることで解決可能なことが知られており、その代表的な理論に Israel-Stewart 理論があります。これは、微分の階数を増やし、拡散方程式を電信方程式にすることで信号が有限速度で伝わるようになることと対応します。この場合、構成方程式中の流速の 2 階微分を含む項を対称性で分類し、それぞれの項の係数が 2 次の輸送係数となります。実はゲージ・重力対応を用いて 2 次の輸送係数を求める研究の過程で、Israel-Stewart 理論では考えられていなかった項の存在が指摘されました。[9]

量子異常の存在する流体力学

また、上記 1、2 のように、保存電荷を導入した動的ブラックホールと流体力学の対応を研究していく過程で、量子異常[16]を含むゲージ理論流体に対する流体力学が議論されるようになりました。[12]

これらの発展は、ゲージ・重力対応を用いなくても可能なはずでした。なぜならば、新しく取り入れられた項・効果は、重力理論を用いなければ説明が不可能という類のものではなく、重力理論を用いなくとも既存の流体力学の延長として原理的に導入可能なものです。しかしながら、これらの新しい項・効果の導入に際して、歴史的にゲージ・重力対応の研究が契機となったのは事実です。

4. 物性系への応用

以上は、もともとは QCD への応用を見据えて議論されたものですが、現実の物性系でもしばしば強相関系が現れます。そこで AdS/CFT 双対性を実際の物性系に応用しようという試みもさかんに行なわれています。たとえば、超伝導／超流動 [13]、非フェルミ流体 [14] の振るまいがみられる重力理論などが知られています。

「物性系への応用」と言っても、現時点では実際の物性系に直接関係するわけではありません。あくまで、物性で興味深い現象（たとえば超伝導）が、large-N_c ゲージ理論の枠組みでもみられるといった意味合いです。したがって、たとえば高温超伝導の問題が、ゲージ重力対応によって解けるかどうかは不明です。しかし、これらの研究

[16]量子異常 (anomaly) とは、理論が古典レベルで保つ対称性が量子効果により破れる現象のことです。ゲージ・重力対応ではゲージ理論の量子論が重力の古典論で記述されるため、ゲージ理論の量子異常の効果も、重力理論側には自動的に含まれています。このため重力による流体力学の考察では、必然的に量子異常の効果も取り込むこととなります。

によれば、large-N_c ゲージ理論は通常の物性と同程度に豊かな物理的な内容を持つようです。そこで、実際の物性系を理解する上でも、このような研究が何か示唆を与えてくれるのではと期待されています。

8 展望

以上、簡単にゲージ・重力対応と流体力学のつながりについて概観してきました。それでは、今後、ゲージ・重力対応と流体力学の関係においてどのような発展が期待できるのでしょうか。筆者は個人的に次のような展望を抱いています。

- 流体力学における重要問題に対する新たな視点の提供
  流体力学は我々の生活に密着した非常に重要な学問であり、その研究の歴史も長いわけですが、様々な未解決問題があります。例えば筆者が興味を持っている問題は乱流の記述です。流体のレイノルズ数が臨界値を超えると層流が不安定になりますが、これを重力理論側の言葉に焼きなおすと、ブラックホールを静的なものから動的なものへと変化させていく過程で、ある臨界を超えると（層流の不安定性に対応する）新たな不安定性が生じることになるのではないかと予想されます。つまり、流れの不安定性の問題は動的ブラックホールの不安定性の問題に翻訳されるのではないかと考えられます。はたして動的ブラックホールの解析が流体力学における乱流の解析に比べて容易かどうかは判断しかねますが、いずれにしても全く異なる視点から問題に挑戦することが可能になることは確かです。また上記の問題とも関連しますが、時間依存性の入った重力時空の解析から、ゲージ粒子系の非平衡物理学に対するヒントを得ることも可能かも知れません。

- 巨視的物理と微視的物理の接点
  ゲージ・重力対応は、特殊なゲージ理論については重力理論側との対応が詳細に調べられており、ゲージ理論の微視的物理と巨視的物理の双方を重力理論のもとで同時に記述することが可能です。従って巨視的物理と微視的物理の接点、あるいは両者の中間スケールの物理現象の研究に、ゲージ・重力対応を応用することが出来る可能性もあると考えています。

- 強結合問題を解く手法としてのゲージ・重力対応
  ゲージ・重力対応を場の理論の問題としてとらえると、$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論のような理想化された系を考えているという意味で、場の理論における「可解模型」のような役割を担っているとも言えます。一般の場の理論を解くのは困難であり、少数の可解模型が場の理論に対する私たちの直感を養うのに事実上大きな役割を果たしてきました。ゲージ・重力対応は最近では物性系への応用も試みられていますが、その有用性はどこまで広がるのでしょう。large-N_c 極限や ϵ-展開のように、場の理論における標準的な手法になるのでしょうか。

- ブラックホールにおける新しい見方
  ゲージ・重力対応の方向性としては、2つのアプローチがありえます。つまり、

  1. 場の理論を理解するために重力を使う
  2. 重力を理解するために場の理論を使う

  本稿は1の立場で書いたものですが、2の立場を考えると、場の理論からすでに得られた結果を重力理論に適用することで、ブラックホールに対して新しい結果が期待できます。特に、ブラックホールでは「時空特異点問題」や「インフォメーション・パラドックス」と呼ばれる重力の未解決問題が多数存在します。2の立場が、これらの未解決問題を解くうえで有用かもしれません。

ゲージ・重力対応を用いると、ゲージ理論側における「熱平衡とは何か」という問いが「ブラックホールとは何か」という問いに翻訳されます。系を平衡からずらしていった際にその物理がどのように記述できるのか、という非平衡物理学の問いは、「ブラックホール時空に時間依存性を入れていった場合に、重力時空の性質がどのように記述されるのか」という問いへと翻訳されるのです。既に述べたように、系が時間的・空間的に変化する場合のブラックホールについては、その定義や熱力学的性質なども含め、それ自身がまだ完全には理解されておらず、一般相対性理論における一つの研究テーマとなっています。今後、重力側の知見が非平衡物理学へのヒントを与えるかも知れませんし、あるいは非平衡物理学での知見が重力理論へのヒントを与えることになるのかも知れません。

現在のところ、ゲージ・重力対応を専門的に研究している研究者は超弦理論の専門家、重力理論の専門家と一部の原子核理論の専門家に限られていると思います。しかしながら、ゲージ・重力対応の応用は、QCDやクォーク・ハドロン物理学にとどまらず、流体力学や物性物理学と広範なテーマへの応用が可能だと考えられています。このような状況では、もはや超弦理論の研究者のみでの研究には限界があります。今後、この分野の研究をいかに発展させることができるかは、超弦理論、重力理論の研究者が、いかに原子核理論、物性理論、流体力学の研究者とうまく議論し共同研究を行っていくことができるかにかかっていると考えます。この記事が、そのような異分野交流の良いきっかけとなることを願います。

参考文献

[1] ゲージ・重力対応の原著論文としては
J. M. Maldacena, "The large N limit of superconformal field theories and supergravity," Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231 [Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113] [arXiv:hep-th/9711200],
および [2]。

[2] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from non-critical string theory," Phys. Lett. B **428** (1998) 105 [arXiv:hep-th/9802109]; E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253 [arXiv:hep-th/9802150].

[3] ゲージ・重力対応のより詳細な日本語によるレビュー記事としては、例えば
今村洋介,「AdS_5/CFT_4 correspondence」, 素粒子論研究 98(6), pp.209-242 (1999);
夏梅 誠,「線形応答理論で学ぶ AdS/CFT 双対性」, 原子核研究特集号 54 巻 Suppl. 3「相対論的流体力学と高エネルギー重イオン反応：来し方行く末」, pp.110-142 (2010).

[4] 流体力学的物理量のゲージ・重力対応を用いた導出等に関するレビューとしては、例えば
M. Natsuume, "String theory and quark-gluon plasma," arXiv:hep-ph/0701201;
D. T. Son and A. O. Starinets, "Viscosity, Black Holes, and Quantum Field Theory," Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **57** (2007) 95 [arXiv:0704.0240 [hep-th]].

[5] 流体力学と重力理論の対応に主眼を置いたレビューとしては、例えば
M. Rangamani, "Gravity & Hydrodynamics: Lectures on the fluid-gravity correspondence," arXiv:0905.4352 [hep-th].

[6] $\eta/s = 1/4\pi$ が成立する様々な具体例については、例えば文献 [4]（[Natsuume] の C 章、[Son-Starinets] の 6 章、7 章）およびそこで引用されている文献を参照。

[7] P. Kovtun, D. T. Son, A. O. Starinets, "Viscosity in Strongly Interacting Quantum Field Theories from Black Hole Physics," Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 111601, arXiv:hep-th/0405231.

[8] D. Teaney, "The Effect of Shear Viscosity on Spectra, Elliptic Flow, and HBT Radii," Phys. Rev. **C68** (2003) 034913, arXiv:nucl-th/0301099;
T. Hirano and M. Gyulassy, "Perfect Fluidity of the Quark Gluon Plasma Core as Seen through its Dissipative Hadronic Corona," Nucl. Phys. **A769** (2006) 71.

[9] 因果的流体力学とゲージ・重力対応における研究に関するレビューとしては、例えば
M. Natsuume, "String theory implications on causal hydrodynamics," Prog. Theor. Phys. Suppl. **174** (2008) 286-297, arXiv:0807.1394 [nucl-th].

[10] ホログラフィックな繰り込み、繰り込み群のレビューとしては、例えば
K. Skenderis, "Lecture notes on holographic renormalization," Class. Quant. Grav. **19** (2002) 5849, arXiv:hep-th/0209067; J. de Boer, "The Holographic Renormalization Group," Fortsch. Phys. **49** (2001) 339, arXiv:hep-th/0101026.

[11] 筆者の一人が関わった仕事で、時間依存する重力時空と流体力学の関係を論じた代表的な論文は
S. Kinoshita, S. Mukohyama, S. Nakamura and K. y. Oda, "Consistent Anti-de Sitter-Space/Conformal-Field-Theory Dual for a Time-Dependent Finite Temperature System," Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 031601, arXiv:0901.4834 [hep-th]; S. Kinoshita, S. Mukohyama, S. Nakamura and K. y. Oda, "A Holographic Dual of Bjorken Flow," Prog. Theor. Phys. **121** (2009) 121, arXiv:0807.3797 [hep-th].

[12] D. T. Son and P. Surowka, "Hydrodynamics with Triangle Anomalies," arXiv:0906.5044 [hep-th].

[13] ホログラフィック超伝導／超流動についてのレビューとしては、
S. A. Hartnoll, "Lectures on holographic methods for condensed matter physics," arXiv:0903.3246 [hep-th]; C. P. Herzog, "Lectures on Holographic Superfluidity and Superconductivity," J. Phys. A **42** (2009) 343001, arXiv:0904.1975 [hep-th].
日本語のものとしては、文献 [3] の [夏梅] がある。

[14] T. Faulkner, N. Iqbal, H. Liu, J. McGreevy and D. Vegh, "From black holes to strange metals," arXiv:1003.1728 [hep-th].